Zastosowanie geometryczne całek do obliczania pól obszarów płaskich.

Zadanie

Oblicz pole figury ograniczonej wykresami: $f(x) = x^2 - x - 6$ **oraz** $g(x) = -x^2 - x + 2$

Takim kolorem zostały podane komentarze, które pozwolą lepiej przyswoić materiał.

Rozwiązanie

Aby zobrazować graficznie z jaką figurą geometryczną mamy problem, naszkicujmy ją. Figurę tę ograniczają wykresy dwóch funkcji kwadratowych. Wyznaczmy wykresy obydwu, w tym celu znajdźmy ich miejsca zerowe. Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 - x - 6$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1 \cdot (-6)) = 1 + 24 = 25$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$

$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

Współczynnik kierunkowy $a = 1 > 0$, zatem ramiona wykresu funkcji f skierowane są do góry.

Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji $g(x) = -x^2 - x + 2$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1 \cdot 2) = 1 + 8 = 9$

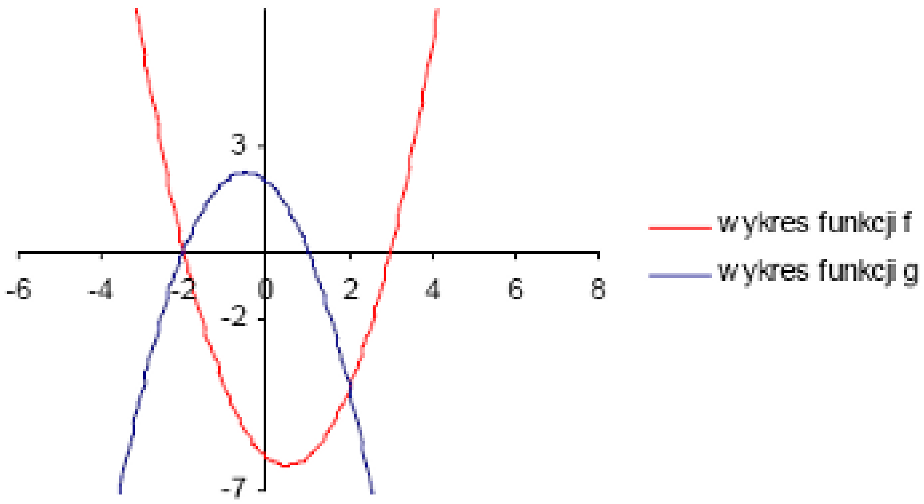
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$x_3 = \frac{1-3}{-2} = 1$

$x_2 = \frac{1+3}{-2} = -2$

Współczynnik kierunkowy $a = -1 < 0$, zatem ramiona wykresu funkcji g skierowane są do dołu.

Wykresy tych funkcji przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1:

Celem zadania jest obliczenie pola figury ograniczonej wykresami funkcji: f i g. Figura ta zaznaczona jest na rysunku 2.

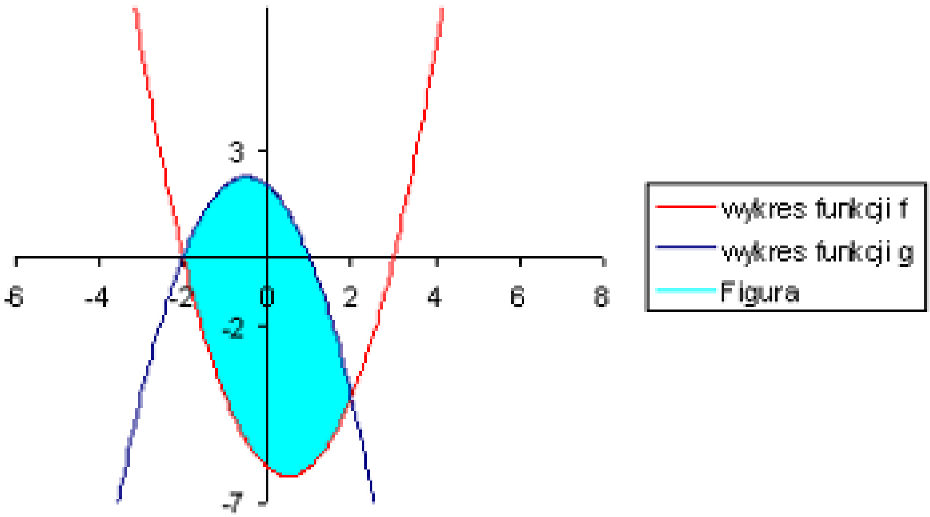
Należy wyznaczyć punkty przecięcia ze sobą obu wykresów.

Wyznaczyć punkty przecięcia się wykresów ze sobą oznacza wyznaczenie takich $x \in R$ dla których $f(x) = g(x)$, czyli w naszym wypadku, kiedy $x^2 – x – 6 = –x^2 – x + 2$.

Rozwiązujemy równanie

$x^2 - x - 6 = -x^2 - x + 2$

$2 \cdot x^2 - 8 = 0 \ / : 2$



Rysunek 2:

$x^2 - 4 = 0$

$(x + 2) \cdot (x - 2) = 0$

$x_a = -2$

$x_b = 2$

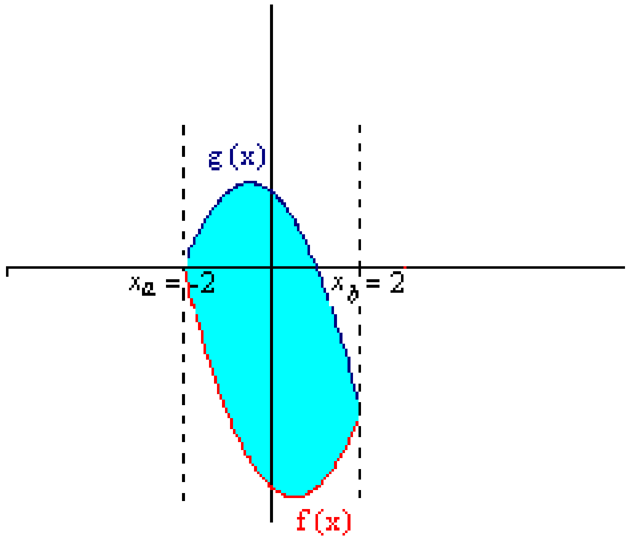
x_a oraz x_b oznaczają punkty przecięcia się funkcji f i g.

Posiadamy już wszystkie informacje potrzebne do wyznaczenia pola figury pokazanej na rysunku 2. Korzystamy z następującego stwierdzenia:

Jeśli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $< a; b >$ i $f(x) \leqslant g(x)$ w tym przedziale, to pole obszaru ograniczonego wykresami tych funkcji i prostymi $x = a$ i $x = b$ jest równe:

$$Pole = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

Podsumujmy zebrane informacje. Nasza figura ograniczona jest funkcjami f i g, które dla $x \in < -2; 2 >$ spełniają zależność $f(x) \leqslant g(x)$. Obszar ten ograniczony jest również przez proste $x = -2$ i $x = 2$ (rysunek 3). Możemy zatem skorzystać z powyższego stwierdzenia.



Rysunek 3:

$$Pole = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^2 (-x^2 - x + 2 - (x^2 - x - 6))dx =$$

$$= \int_{-2}^2 (-2 \cdot x^2 + 8)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot x\right]_{-2}^2 =$$

$$= -2 \cdot \frac{2^3}{3} + 8 \cdot 2 - (-2 \cdot \frac{(-2)^3}{3} - 8 \cdot 2) = 21\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: Pole figury z rysunku 3 wynosi $21\frac{1}{3}$ jednostek kwadratowych.